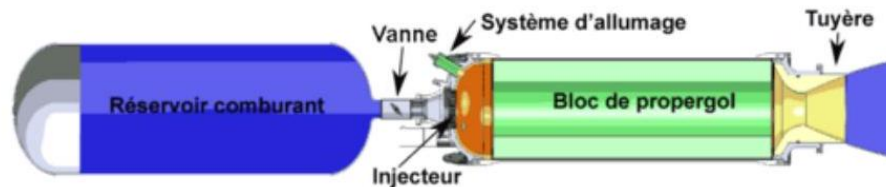


Simulateur de moteur de fusée hybride

Antoine LE DEROFF SAINTILAN

1 Introduction

Les moteurs-fusées hybrides représentent une classe innovante de propulseurs spatiaux qui tirent parti des avantages combinés des moteurs à propergol solide et liquide. Leur conception unique intègre un carburant solide, généralement sous forme de grains, avec un oxydant liquide. Ce mixte offre des performances accrues, une meilleure maîtrise de la poussée et une flexibilité opérationnelle. Voici un schéma d'un moteur de fusée hybride:



2 Modèle du réservoir

2.1 Propriétés du N₂O

Voici un tableau regroupant les principales propriétés du N₂O:

Temperature de fusion (K)	184.68
Temperature critique (K)	309.52
Pression critique (Bar)	72.450
Masse volumique critique (kg/m ³)	452.0

Différentes définitions s'imposent :

- La température critique d'une substance est sa température maximale en phase liquide, quelle que soit la pression, c'est-à-dire la température de son point critique.
- La pression critique est définie comme étant la valeur de la pression au-dessus de laquelle le gaz et le liquide ne peuvent pas coexister à aucune température, pour une substance dite pure.

Des régressions polynomiales ont également été faites afin de faciliter le calcul mathématique des différentes propriétés thermodynamiques, basées sur les tables thermodynamiques "Nist Webhook", toutes résumées dans un tableau ci-dessous, valables sur l'intervalle de température $T \in [268.15, 304]$:

Fonction	Équation
P_v (Bar)	$P_v(T) = -651.8164 + 7.8613T - 0.033031T^2 + 4.9077 \times 10^{-5}T^3$
dP_v (Bar)	$dP_v(T) = 7.8613 - 2 \times 0.033031T + 3 \times 4.9077 \times 10^{-5}T^2$
\hat{V} (m ³ /kg)	$V_l(T) = -0.1463 + 0.0016T - 5.7605 \times 10^{-6}T^2 + 6.9732 \times 10^{-9}T^3$
Cv Vapor (J/mol * K)	$C_{v,v}(T) = -2043.2863 + 22.3930T - 0.0809T^2 + 9.8359 \times 10^{-5}T^3$
H Vapor (kJ/mol)	$H_v(T) = 725.7051 - 7.7495T + 0.0283T^2 - 3.4583 \times 10^{-5}T^3$
HLiquid(kJ/mol)	$H_l(T) = -493.6711 + 5.2964T - 0.0190T^2 + 2.3145 \times 10^{-5}T^3$
ΔH (kJ /mol)	$\Delta H(T) = H_v(T) - H_l(T)$
Rho Liquid (kg/m ³)	$\rho_l(T) = 53601.7911 - 566.1289T + 2.0455T^2 - 0.0025T^3$

Ici, P_v représente la pression de vapeur saturante, dP_v sa dérivée respective, \hat{V} représente le volume spécifique, Cv Vapor représente la capacité calorifique molaire à volume constant pour la phase vapeur, Cv Liquid est la même chose que Cv mais pour la phase liquide, H Vapor l'enthalpie de la phase vapeur, H Liquid l'enthalpie de la phase liquide, et ΔH l'enthalpie de vaporisation. Toutes ces propriétés sont calculées à l'aide de la température T .

2.2 Hypothèses

Pour schématiser l'évolution du réservoir (quantités de matières, températures), nous allons fixer diverses hypothèses :

- Le réservoir se vide de telle sorte que la température, T , et la pression, P , du liquide et du gaz sont uniformes, c'est-à-dire que ces propriétés sont les mêmes à chaque point du réservoir (pas de variation de température entre le haut du réservoir et le bas du réservoir), durant tout le long du processus de vidage. Ainsi, on dit que le réservoir est en équilibre de phase pendant tout le vidage.
- On considère que les parois du réservoir sont adiabatiques, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'échange de chaleur entre celui-ci et l'extérieur, le processus adiabatique implique également la réversibilité de la transformation.
- Les parois du réservoir sont à tout instant en équilibre thermique avec le contenu du réservoir.
- On néglige également l'énergie potentielle et cinétique des phases liquide et gazeuse.
- Enfin, on assimile la phase gazeuse en adéquation avec la loi des gaz parfaits.

2.3 Résolution

Avec les hypothèses précédentes, nous pouvons établir trois équations différentielles, basées sur la conservation de la masse, de l'énergie, et les lois thermodynamiques actuelles. Ces équations sont de la forme suivante :

$$\begin{aligned} (m_T \cdot C_{p_t} + n_l \cdot C_{v_l} + n_v \cdot C_{v_v}) \cdot \frac{dT}{dt} &= \frac{dn_v}{dt} \cdot [RT - \Delta H] + \frac{dn_l}{dt} \cdot (P_v \cdot \hat{V}_l) \\ \dot{n} = \frac{dn_v}{dt} + \frac{dn_l}{dt} &= -Cd \cdot AI \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_t - P_c)}{M \cdot \hat{V}_l}} \\ -\hat{V}_l \cdot \frac{dn_l}{dt} \cdot P_v + \left(V - n_l \cdot \hat{V}_l \cdot \frac{dP_v}{dT} \right) \cdot \frac{dT}{dt} &= R \left(T \cdot \frac{dn_l}{dt} + n_v \cdot \frac{dT}{dt} \right) \end{aligned}$$

Ce système d'équations possède trois équations différentielles ordinaires, avec trois inconnues $\left(\frac{dn_l}{dt}, \frac{dn_v}{dt}, \frac{dT}{dt} \right)$ qui peuvent être résolues facilement dans Matlab, voir Annexes. Une fois les dérivées obtenues analytiquement, on utilise la méthode d'Euler explicite pour approximer la fonction à l'instant $t + dt$ car aucune solution analytique existe à ce jour (on ne peut pas généralisé). Ce processus est répété pour chaque équation différentielle ordinaire.

$$f(t, y(t)) = \frac{dy}{dt} \approx \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \Leftrightarrow y(t + \Delta t) \approx y(t) + f(t, y(t)) \cdot \Delta t$$

Une fois la résolution effectuée, la pression P_t peut être déduite grâce aux solutions obtenues précédemment et en la combinant avec la loi de Raoult.

$$P_t = \frac{n_g \cdot R \cdot T}{V - n_l \cdot \hat{V}_l}$$

Ce processus peut être réitéré x fois tant que $n_l > 0$. Les valeurs initiales ($t = 0$ s) sont calculées d'après les formules suivantes :

$$\begin{aligned} n_{L_{initial}} &= \frac{n_t \cdot R \cdot T_0 - P_v \cdot V}{R \cdot T_0 - P_v \cdot \hat{V}_l} \\ n_{V_{initial}} &= \frac{P_v \cdot (V - n_t \cdot \hat{V}_l)}{R \cdot T_0 - P_v \cdot \hat{V}_l} \end{aligned}$$

Où $n_t = n_v + n_l$ est le nombre total de moles d'oxyde nitreux initialement chargé dans le réservoir.

3 Modélisation de la chambre de combustion

3.1 Propriétés

Dans cette section, nous allons aborder les propriétés thermodynamiques du couple N2O/ABS. On utilise le wrapper Matlab du logiciel d'équilibre chimique

NASA CEA pour déterminer γ et T_c qui dépendent d'O/F, P_c , ainsi que de ϵ $\left(\frac{A_c}{A_t}\right)$. Il est alors nécessaire de connaître ces trois valeurs lors de la première itération.

3.2 Hypothèses

Les différents processus physiques et chimiques qui se produisent dans un moteur-fusée réel pendant son fonctionnement sont très complexes. Ces processus comprennent les réactions chimiques complexes qui se produisent lors de la combustion ; la manière dont se produit la «consommation» du grain propulsif pendant la combustion; le comportement du flux de gaz d'échappement lorsqu'ils se forment au niveau de la surface de combustion, traversent la chambre et sortent par la buse; l'interaction entre les gaz d'échappement et les particules condensées (fumées). L'analyse théorique d'un moteur-fusée nécessite certaines simplifications, c'est-à-dire que l'hypothèse est celle d'un moteur-fusée idéal. Un moteur-fusée idéal suppose les éléments suivants :

- La combustion du propulseur est complète et ne diffère pas de celle supposée par l'équation de combustion.
- Les produits de combustion obéissent à la loi des gaz parfaits.
- Aucun frottement n'entrave l'écoulement des produits d'échappement.
- La combustion et le débit dans le moteur et la buse sont adiabatiques, c'est-à-dire qu'aucune perte de chaleur ne se produit dans l'environnement.
- Sauf indication contraire, des conditions stables existent pendant le fonctionnement du moteur. Cela signifie que les conditions ou processus qui se produisent ne changent pas avec le temps (pour des conditions géométriques données) lors de la combustion.
- La dilatation du fluide de travail (produits d'échappement) se produit de manière uniforme, sans choc ni discontinuité.
- L'écoulement à travers la buse est unidimensionnel et non rotatif.
- La vitesse d'écoulement, la pression et la densité sont uniformes sur toute section transversale normale à l'axe de la buse.
- L'équilibre chimique s'établit dans la chambre de combustion et ne change pas lors de l'écoulement à travers la buse. C'est ce qu'on appelle des conditions «d'équilibre gelé».
- La combustion du grain propulseur progresse toujours normalement (perpendiculairement) à la surface en combustion et se produit de manière uniforme sur toute la surface exposée à la combustion.

3.3 Résolution

Pour commencer, nous pouvons convertir notre débit molaire calculé précédemment en débit massique à l'aide de la formule suivante dérivée du théorème de

Bernoulli (valable pour les écoulements incompressibles)

$$\dot{m}_o = C_d A \sqrt{\frac{2\rho\Delta P}{1 - \left(\frac{A}{A_1}\right)^2}}$$

Ici C_d est un coefficient sans dimension pour caractériser les pertes de pression dans les systèmes fluidiques (dans notre cas vannes, tuyaux...), A représente la surface de l'orifice et ΔP représente la variation de pression entre la pression en amont et en aval. Dans la plupart des cas, $A \ll A_1$ ce qui permet de réduire l'équation de la façon suivante:

$$\dot{m}_o = C_d A \sqrt{2\rho\Delta P}$$

Ensuite, nous allons calculer la régression du carburant choisi, pour le moment ce logiciel prend uniquement en charge l'ABS. La régression du carburant fait référence au processus par lequel le grain de carburant d'une fusée à propulseur hybride est converti d'un solide (l'ABS dans notre cas) en un gaz qui est brûlé. Il englobe le taux de régression, la distance de recul de la surface du combustible sur une période de temps donnée, ainsi que la zone de combustion, la surface qui est érodée, à un instant donné. Son expression mathématique est la suivante :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = a \cdot (G_o)^n = a \cdot \left(\frac{\dot{m}_o}{\pi \cdot r_i^2}\right)^n = a \cdot \left(\frac{2 \cdot \rho_f \cdot L \cdot \dot{r} \cdot O/F}{r_i}\right)^n$$

$$\dot{P}_c = \frac{R \cdot T_c}{V_c} \cdot (\dot{m}_o + \dot{m}_f - \dot{m}_{out})$$

$$\dot{P}_c = \frac{dP_c}{dt} = \frac{R \cdot T_c}{V_c} \left(\dot{m}_o + \rho_f \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_i \cdot L \cdot \frac{dr}{dt} - A_t \cdot P_c \cdot \sqrt{\left(\frac{\gamma}{R \cdot T_c}\right) \cdot \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} \right)$$

\dot{r} est donc le taux de régression, a et n sont des coefficients empiriques à déterminer expérimentalement, P_c représente la pression dans la chambre de combustion en pascal, R la constante des gaz parfaits, et \dot{P}_c représente la dérivée temporelle de la pression. Ces deux équations différentielles supplémentaires sont intégrées numériquement par rapport au temps, toujours en utilisant le schéma explicite d'Euler. Ce processus est également répété jusqu'à ce que $n_o = 0$ mol.

4 Résultats

4.1 Exemple d'entrée

Paramètre	Valeur
Température initiale (K)	293.1
O/ F Ratio	5.5
Ae / At Ratio ϵ	5.5
Pression initiale dans la chambre de combustion (Bar)	1
Masse de N ₂ O (kg)	9.5
Masse du réservoir (vide) (kg)	5
Volume dans le réservoir (L)	12.624
Aire d'injection (m ³)	$9.5 * 10^{-5}$
Longueur du grain (m)	$430 * 10^{-3}$
Rayon initial interne du grain $r_i(m)$	$27.8 * 10^{-3}$
Rayon externe du grain $r_o(m)$	$85.7 * 10^{-3}$
Masse volumique du carburant ρ_f en kg/m ³	1070
Coefficient a et n	0.00742, 0.799
Aire de la gorge A_t (m ²)	$5.07 * 10^{-4}$
Coefficient de décharge C_d	0.361

4.2 Exemple de sortie

